ISSN Print: 2394-7500
ISSN Online: 2394-5869
Impact Factor: 5.2
IJAR 2018; 4(8): 157-159
www.allresearchjournal.com
Received: 19-06-2018
Accepted: 21-07-2018

Edwin Rivera Rivera
Universidad de Puerto Rico, Recinto de Rio Piedras

Patricia Mattei Ramos
Universidad de Puerto Rico, Recinto de Rio Piedras

Correspondence
Edwin Rivera Rivera
Universidad de Puerto Rico, Recinto de Rio Piedras

La demostración del método griego para hallar la recta tangente a un círculo en su forma general. Integración del álgebra y la geometría analítica

Edwin Rivera Rivera and Patricia Mattei Ramos

Abstract
In this paper we demonstrate three important things to present Greek Theorem to find the tangent line to a circle in its general form without using trigonometry. Were employed discriminant properties and also prove your property without having to solve the whole polynomial. Was found the point of tangency, the general equation passing through the nip and be perpendicular to the radius of the circle. Then perform an example for a particular case of the application of the method and demonstrated Greek Theorem for the general case.

Keywords: Perpendicular, tangent point, discriminant

Introduction

En los últimos tiempos las demostraciones y problemas de contenido con estructura matemática se han hecho cada vez más ventajoso para aquellos que quieren desarrollar grandes capacidades en el área de las matemáticas. Ejemplo de ello las demostraciones en el álgebra le irán dando a los estudiantes una estructura mental en su pensamiento logico-matematico a los estudiantes. Giménez (2002) [1], señala que las demostraciones en matemáticas dan la capacidad abstracta al estudiante, donde este puede generalizar unos conceptos que luego puede aplicar a los ejercicios o problemas en particular.

De igual modo, en los últimos años las matemáticas tienen más importancia para las ciencias naturales, ingeniería y para explicar los fenómenos físicos que van surgiendo en el mundo. A la misma vez en la economía se van necesitando mayores conocimientos matemáticos y los estudiantes necesitan fortalecer aún más sus estructuras de análisis en esta ciencia. Por ende una manera de hacerlo es realizando demostraciones en el área de las matemáticas en particular el álgebra y la geometría. Ibáñez (2003) [2] resalta la idea de realizar demostraciones en el álgebra para así dar una amplia visión de lo que son las generalizaciones de variables, símbolos y operaciones.

En la mayoría de los casos en la geometría analítica se presentan una serie de teoremas y muchos de ellos son demostrados con los teoremas de la geometría euclidiana. De igual manera en el álgebra se presentan una serie de teoremas que muchos de los maestros y a su vez sus estudiantes piensan que están demostrados con casos particulares o ilustraciones de ejemplos.

Asimismo, Valles (2007) [5] presenta las demostraciones en matemática, como la prueba de que el estudiante ha alcanzado un alto nivel de pensamiento. Por tal razón, se espera que el maestro vaya capacitando a sus estudiantes a la realización de demostraciones en matemáticas para que puedan ejercer un nivel de pensamiento cada vez más elevado en esta gran ciencia del saber.

El próximo problema que se realizará está basado en la demostración del Teorema Griego del punto tangente a la ecuación del centro de un círculo. Esta demostración ayudará al estudiante a ver la estructura de una demostración en un problema de álgebra y geometría analítica. De igual modo, se estarán utilizando como ayuda del Teorema otros teoremas que de igual modo se irán demostrando para así completar el ejercicio.

En esta demostración el maestro y estudiante podrán ver como se integran los procesos generales y tradicionales como los son: factorización, suma de términos semejantes, propiedades del discriminante, igualdad de ecuaciones, sustituciones y otros.

Presentación del Problema

La recta tangente a un círculo se define como la recta que corta al círculo en un solo punto, llamado punto de tangencia (ver figura1). Si la ecuación del círculo es: $x^2 + y^2 = r^2$ y la ecuación de la recta tangente es: $y = mx + b$ se demostrarán los siguientes planteamientos algebraicos dentro de la geometría analítica.

a) Se demostrará que: $r^2(1 + m^2) = b^2$
b) También se demostrará que el punto de tangencia está dado por: $\left(\frac{-r^2m}{b}, \frac{r^2}{b}\right)$
c) De igual modo, se demostrará como se representa en la figura1 que la recta tangente es perpendicular a la recta que contiene el centro del círculo y el punto de tangencia.

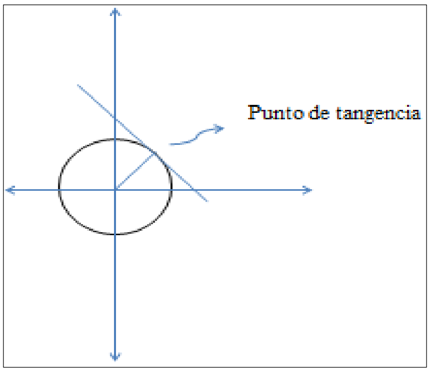

Fig 1

1) Demostraremos que si tenemos la ecuación del circulo: $x^2 + y^2 = r^2$ y la ecuación de la recta tangente $y = mx + b$ implica que: $r^2(1 + m^2) = b^2$

Demostración: sustituimos el valor de y en la ecuación del circulo: $x^2 + (mx + b)^2 = r^2$ una vez tenemos la ecuación de esta manera procedemos a desarrollar el polinomio.

$$x^2 + (mx)^2 + 2mbx + b^2 - r^2 = 0$$

Se escribirá como la ecuación cuadrática. $(1 + m^2)x^2 + (2mb)x + (b^2 - r^2) = 0$, ahora utilizaremos el dato sumamente importante del discriminante, el cual se demostrará también más adelante. Se demostrará la parte a del teorema que $b^2 = r^2(1 + m^2)$.

Demostración que la ecuación: $(1 + m^2)x^2 + (2mb)x + (b^2 - r^2) = 0$ la cual por la propiedad del discriminante tiene una solución. Utilizaremos las propiedades del discriminante: si $B^2 - 4AC = 0$ el trinomio cuadrático tiene una solución. Tomaremos como A= $(1 + m^2)$ $B = (2mb)$ $C = (b^2 - r^2)$ sustituimos en la fórmula y obtenemos lo siguiente: $(2mb)^2 - 4(1 + m^2)(b^2 - r^2) = 0$

$$4m^2b^2 - (4 + 4m^2)(b^2 - r^2) = 0$$

$$4m^2b^2 - (4b^2 - 4r^2 + 4m^2b^2 - 4m^2r^2) = 0$$

$$4m^2b^2 - 4b^2 + 4r^2 - 4m^2b^2 + 4m^2r^2 = 0$$

$$-4b^2 + 4r^2 + 4m^2r^2 = 0$$

Sacamos el 4 como factor común.

$$4(-b^2 + r^2 + m^2r^2) = 0$$

Despejamos para b^2 y obtenemos lo que queríamos.

$$b^2 = r^2 + m^2r^2$$

$$b^2 = r^2(1 + m^2)$$

Demostramos la parte a del teorema.

Ahora demostraremos la parte b del teorema que dice que el punto de tangencia está dado por: $\left(\frac{-r^2m}{b}, \frac{r^2}{b}\right)$. Sabemos que el punto de tangencia es el punto donde se encuentran las ecuaciones y donde se forma el ángulo de 90 grados. Por lo demostrado en la parte a sabemos que: $r^2 = \frac{b^2}{1+m^2}$ y teniendo por hipótesis que la ecuación del circulo está dado por $x^2 + y^2 = r^2$ y la ecuación de la recta tangente está dada por $y = mx + b$ ahora procederemos a sustituir en la ecuación del círculo los valores de r^2 & y.

$x^2 + (mx + b)^2 = \frac{b^2}{1+m^2}$ Desarrollamos y obtenemos.

$$x^2 + m^2x^2 + 2mxb + b^2 - \frac{b^2}{1+m^2} = 0$$

La expresamos como un trinomio cuadrático y obtenemos.

$$(1 + m^2)x^2 + 2mbx + \left(b^2 - \frac{b^2}{1 + m^2}\right) = 0$$

Ahora hallaremos el valor de x utilizando la fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-2mb \pm \sqrt{(2mb)^2 - 4(1 + m^2)(b^2 - \frac{b^2}{1+m^2})}}{2(1 + m^2)}$$

Recordemos que por la parte a el discrímínate era igual a cero. Ahora nos quedará lo siguiente:

$$x = \frac{-2mb \pm \sqrt{4b^2m^2 - 4(1 + m^2)(\frac{b^2m^2}{1+m^2})}}{2(1 + m^2)}$$

$$x = \frac{-2mb \pm \sqrt{4b^2m^2 - 4b^2m^2}}{2(1 + m^2)}$$

$$x = \frac{-2mb}{2(1 + m^2)}$$

$x = \frac{-mb}{1+m^2}$ Recordemos que $r^2 = \frac{b^2}{1+m^2}$ por lo tanto $x = \frac{-r^2m}{b}$

Ahora para hallar el valor de y sustituimos el valor de x en $y = mx + b$.

$$y = m\left(\frac{-r^2m}{b}\right) + b$$

$$y = -\frac{r^2m^2}{b} + b^2$$

Recordemos que por la parte a $que\ b^2 = r^2(1 + m^2)$ ahora sustituimos b^2

$$y = -\frac{r^2m^2}{b} + \frac{r^2 + r^2m^2}{b}$$

Entonces tenemos que el valor de $y\ es$:

$$y = \frac{r^2}{b}$$

Por lo tanto, encontrado el valor de y encontramos que el punto de tangencia es: $\left(\frac{-r^2m}{b}, \frac{r^2}{b}\right)$ por lo tanto hemos demostrado la parte b del teorema.
Ahora demostraremos la parte c del teorema que dice que: la recta tangente es perpendicular a la recta que contiene el centro del círculo y el punto de tangencia.

Demostración
Para demostrar la parte c del teorema utilizaremos parte del teorema de las rectas perpendiculares que dice que si el producto de las pendiente el -1 las rectas son perpendiculares demostrado por Pérez (2010) [3] en su trabajo sobre líneas perpendiculares (Educación Matemáticas, Vol. 22).
La pendiente de $y = mx + b\ es\ m$ la pendiente de la recta que contiene el centro del círculo y el punto de tangencia está dado por los puntos: $(0,0)\ y\ \left(\frac{-r^2m}{b}, \frac{r^2}{b}\right)$ así que:
$m = \frac{\frac{r^2}{b} - 0}{\frac{-r^2m}{b} - 0}$ Simplificando la expresión tenemos que $m = \frac{-1}{m}$ por lo tanto el producto de las pendientes es $(m)\left(-\frac{1}{m}\right) = -1$ los cual demuestra que son perpendiculares. Por lo tanto se demuestra la parte c del teorema.

Aplicación del Método Griego
Una vez demostrado el Método Griego para hallar la ecuación de la recta tangente a un círculo usaremos el hecho de que en cualquier punto sobre un círculo, la recta que contiene el radio y la recta tangente en ese punto son perpendiculares (demostrado anteriormente) para presentar el siguiente ejemplo.
Use el método griego para encontrar una ecuación de la tangente al círculo $x^2 + y^2 = 9$ en el punto $(1,2\sqrt{2})$.

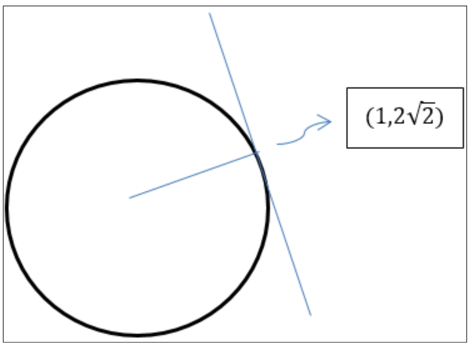

Fig 2

Solución
Dado que el centro del círculo es el punto $(0,0)$ y el punto de tangencia es $(1,2\sqrt{2})$ hallaremos la recta perpendicular a la recta formada por esos dos puntos que en este caso es el radio del círculo. Hallaremos la pendiente de dicha recta $m = \frac{2\sqrt{2}-0}{1-0} = 2\sqrt{2}$ por la demostración anterior del Método Griego sabemos que la pendiente perpendicular es $m_{\perp} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$. Como la ecuación perpendicular para por el punto $(1,2\sqrt{2})$ encontraremos la ecuación perpendicular.
La ecuación perpendicular es: $y - 2\sqrt{2} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}(x - 1)$ si realizamos la operación de simplificar algebraicamente nos quedará la ecuación: $y = \frac{-\sqrt{2}}{4}x + \frac{9\sqrt{2}}{4}$ así que hemos encontrado la ecuación de la recta tangente que es perpendicular al radio del círculo como lo garantizaba la demostración del Método Griego.

Conclusiones
Se entiende que al demostrar la existencia de la recta tangente al radio del círculo para el caso general dará toda confianza al estudiante para hallar dicha ecuación para cualquier caso en particular. Se espera que el estudiante comience con una serie de demostraciones en la matemática en especial en el álgebra y de esta forma los niveles de pensamiento analítico serán más elevados y podrá profundizar aún más en la matemática y su razonamiento diario.
También el concepto de la demostración creará mayor seguridad al estudiante, dado que estos podrán comprobar que existen verdades matemáticas para los casos generales y podrán aplicarlos a casos particulares.
De igual modo, la Integración en la demostración del uso del algebra para la geometría analítica ayudará al estudiante a ver las ramas matemáticas más como un todo y no separadas unas de otras.

Referencias
1. Giménez L. Construyendo Demostraciones e matemáticas aplicadas a la Ingeniería. Publica, 2002, 16-19.
2. Ibáñez T. Fluctuaciones conceptuales en torno a la posmodernidad y la psicología. Caracas: Universidad Central de Venezuela, Facultad de Humanidades y Educación. Comisión de Estudios Postgraduados, 2003.
3. Pérez A. Rectas Perpendiculares. Educación Matemática. 2010; 22(22):143-148.
4. Sullivan M. Algebra y Trigonometría. Pearson. Séptima edición, 2006, 198-199.
5. Valles M. Técnicas Cualitativas de Investigación Social. Reflexión Metodológica y Practica Profesional. España: Síntesis, 2007.